Der fx-991 DE X im Mathematik-Unterricht

Analytische Geometrie

Station 1

Schnittgerade zweier Ebenen

Da der Taschenrechner nur eindeutige Lösungen eines Gleichungssystems liefert, kann er nur Schnittpunkte ausrechnen: Der Schnittpunkt zweier Geraden oder der Schnittpunkt dreier Ebenen (wenn es sie denn gibt). Für die Bestimmung der Gleichung einer Schnittgeraden scheint er ungeeignet zu sein. Wenn jedoch die beiden Ebenen in der Koordinatenform vorliegen, kann man durch eine geschickte Ergänzung doch zur Gleichung der Schnittgeraden kommen:

Idee: Man bringt eine dritte Ebene mit einer möglichst einfachen Gleichung ins Spiel und bestimmt den Schnittpunkt dieser drei Ebenen. Dann wird diese Zusatzebene ein wenig verschoben und der Schnittpunkt wieder bestimmt. Aus diesen beiden Schnittpunkten kann dann sehr leicht die Schnittgerade bestimmt werden.

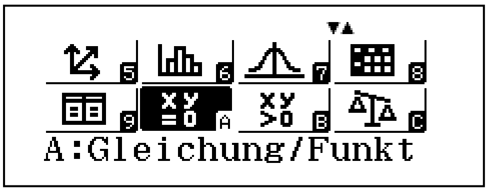
Beispiel: E_1: $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 15$ E_2: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$

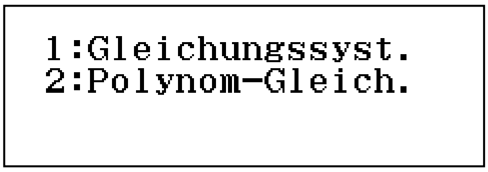
Zusätzliche Ebene: E_3: $x_1 = 0$ liefert den Schnittpunkt P(0 / 19 / 21)

Mit der zusätzlichen Ebene E_4: $x_3 = 0$ erhält man den Punkt Q (6 / 1 / 0).

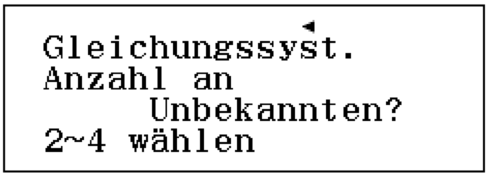
Aus beiden findet man die Schnittgerade: $g\colon \underset{x}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 21 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$

die man dann noch umformen kann zu : $g\colon \underset{x}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ 21 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

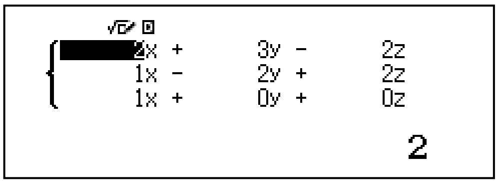




➔ 1



➔ 3

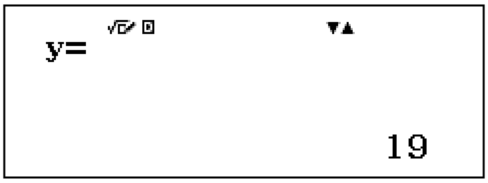


Die erste Gleichung entspricht der Ebene E_1,

die zweite der Ebene E_2 und die dritte der Hilfsebene E_3.

Die Lösung liefert den ersten Schnittpunkt P:

(0/19/21)



Mit AC zurück zum Gleichungssystem und die dritte Gleichung abändern. Die Lösung liefert den zweiten Punkt auf der Schnittgeraden, Q (6/1/0).

Übungsbeispiel:

Untersuchen Sie die Ebenen

E_1: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und E_2: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

auf gemeinsame Punkte.

Der fx-991 DE X im Mathematik-Unterricht

Analytische Geometrie

Station 2

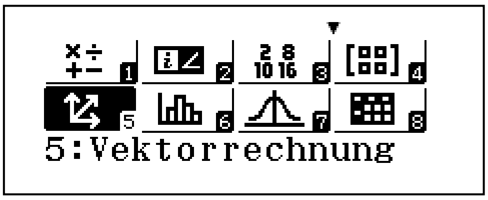
Verschiedene Darstellungen einer Ebene

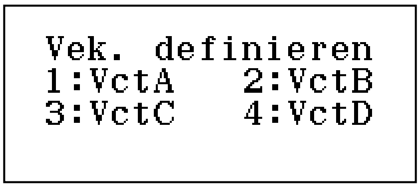
Verwandle die Gleichung der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **in die HNF.**

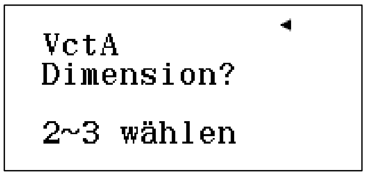
Dazu benötigt man einen Vektor, der auf den beiden Richtungsvektoren senkrecht steht. Diesen gesuchten Vektor liefert das Kreuzprodukt der beiden gegebenen Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

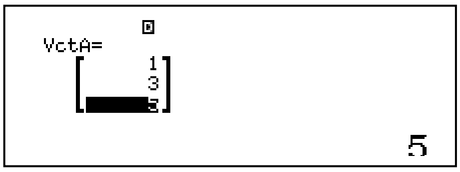
Dieses Kreuzprodukt kann mit dem fx-991DE X leicht berechnet werden:

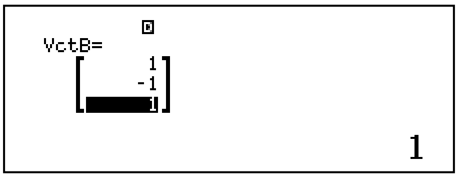




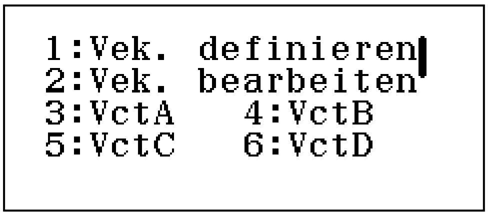


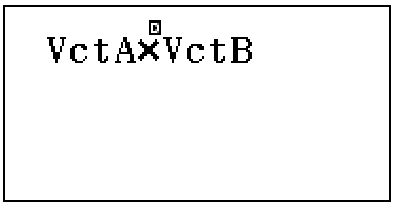
bereitet den Rechner zur Eingabe des ersten Vektors (hier A genannt) vor. Nach der Eingabe der Komponenten [1] [3] [5] wird mit [OPTN] [1] [2] [3] die Eingabe des zweiten Vektors vorbereitet.

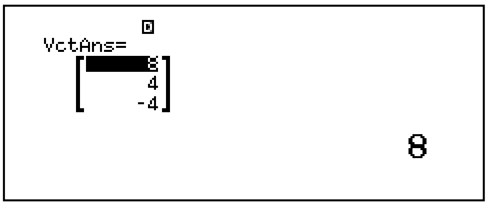




Nach der Eingabe der Komponenten wird mit [OPTN] [3] [OPTN] der Weg zur Berechnung des Kreuzproduktes geöffnet. Jetzt die eingegebenen Vektoren A und B aufgerufen und multipliziert:







Das Ergebnis $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ wird angezeigt, was zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ reduziert werden kann.

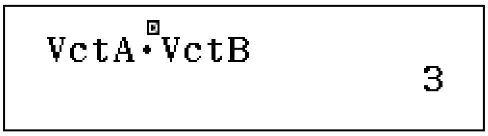
Damit ergibt sich als NF der Ebene: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$ HNF: $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

Und damit auch leicht die Koordinatenform der Ebenengleichung: $2x_1 + x_2 - x_3 = 13$

Anmerkung:

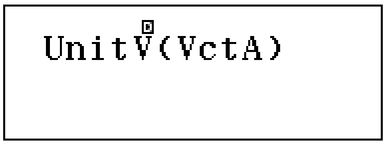
Der TR könnte das **Skalarprodukt** auch berechnen, das ist aber ohne diese Hilfe sicher schneller „im Kopf“ berechnet.

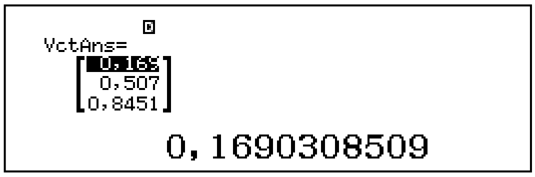
[OPTN] [3] [OPTN] [▼] [2] [OPTN] [4] [=]



Interessanter ist es sicher, einen **Vektor zu normieren**.

[OPTN] [▼] [4] [OPTN] [3] [)]





Übungsbeispiele:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der fx-991 DE X im Mathematik-Unterricht

Analytische Geometrie

Station 3

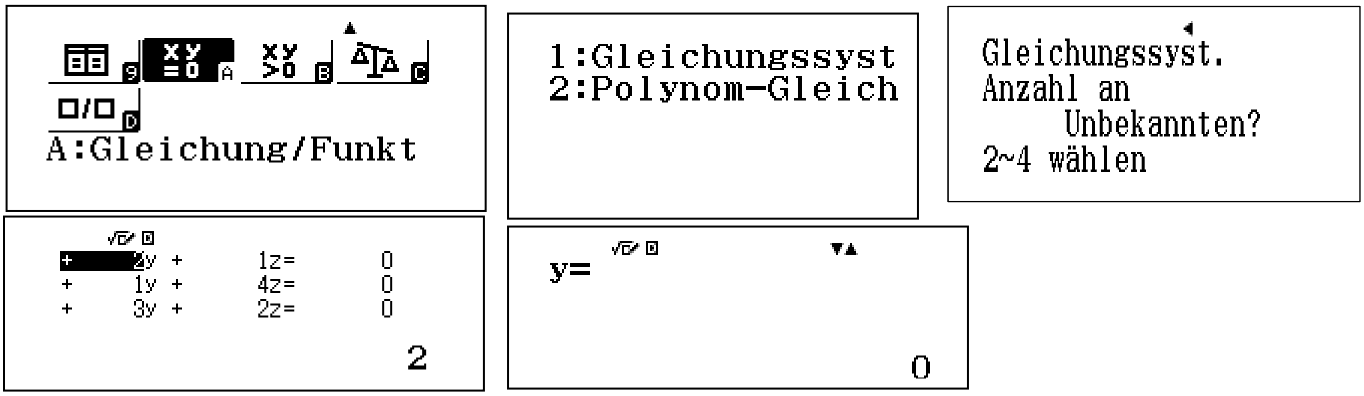
Lineare Unabhängigkeit von 3 Vektoren im R_3

Überprüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $und\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig oder unabhängig sind.

Methode 1:

Die Überprüfung kann durch das Bearbeiten eines 3x3 – Gleichungssystem erledigt werden

MENU (–) [A] 1 3



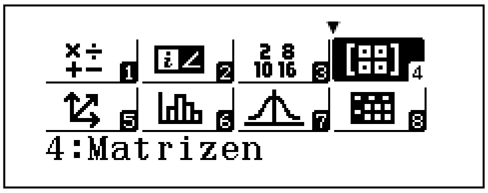
Zuerst wird das Lösen von 3 Gleichungen mit drei Variablen aufgerufen, dann werden die Koeffizienten eingegeben, für die rechte Seite der Gleichungen jeweils 0.

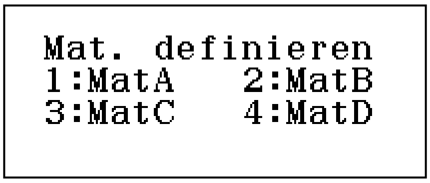
Nach einem = wird als Lösung für x, y und z 0 angezeigt, die Vektoren sind also linear unabhängig.

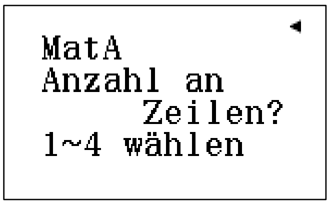
Methode 2: Durch die Berechnung der entsprechenden 3x3-Determinante.

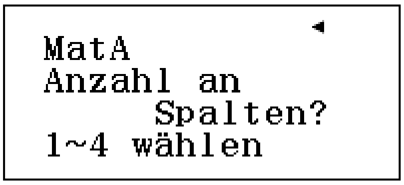
Bei dieser Methode wird eigentlich das Volumen des Spats berechnet, den die drei Vektoren aufspannen. Ist dieses Volumen ungleich Null, dann sind die Vektoren l.u., andernfalls linear abhängig (da sie in einer Ebene liegen, entsteht kein Spat).

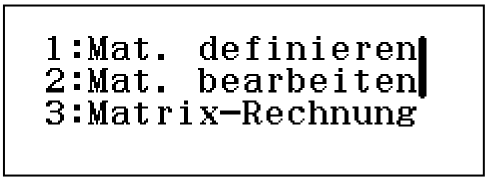
MENU 4 1 3 3 Werte eingeben OPTN 3 OPTN ▼ 2 OPTN 3) =

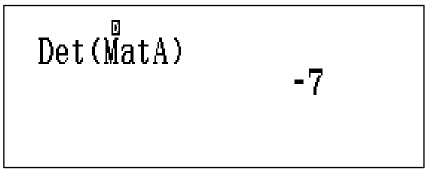






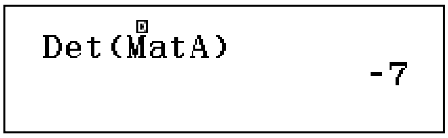






Die 3 Vektoren können jeweils als Zeile oder Spalte der3X3 – Matrix eingegeben werden, das ist für die Berechnung der Determinante egal. Die Eingabe einer Komponente wird jeweils mit = abgeschlossen, die Eingabe der ganzen Matrix mit OPTN beendet.

Die Determinante wird nun durch = berechnet. Da das Ergebnis nicht 0 ist, sind auch hier die Vektoren als l.u. erkannt.



Der fx-991 DE X im Mathematik-Unterricht

Analytische Geometrie

Station 4

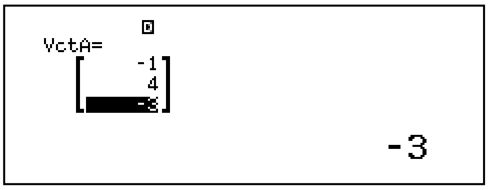
Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Eine häufige (Teil-)Aufgabe ist es, den Winkel zu berechnen, den zwei Vektoren einschließen.

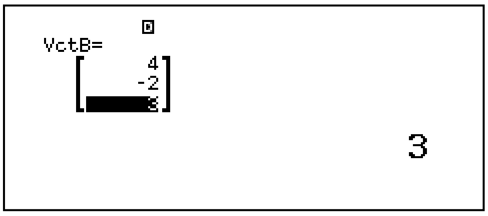
Aufgabe: Bestimme die Größe des Winkels, den $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ einschließen.

Zuerst werden die beiden Vektoren eingegeben:

[OPTN] [5] [1] [3]



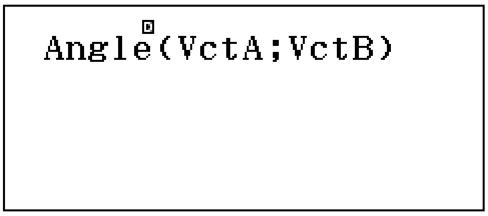
Und [OPTN] [1] [2] [3]



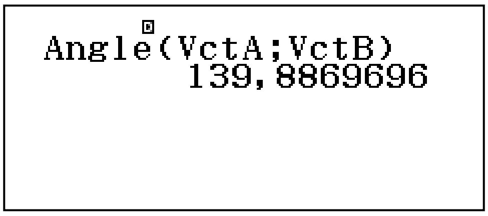
Die Winkelberechnung:

[OPTN] [▼] [3] [OPTN] [3] [SHIFT] [)] [OPTN] [4] [)]

Führt zu:



Mit dem Ergebnis von ca 140°



Der fx-991 DE X im Mathematik-Unterricht

Analytische Geometrie

Station 5

Rechnen mit Matrizen

Eine für den Schulunterricht typische Anwendung der Matrizenrechnung ist das Rechnen mit stochastischen Matrizen, den **Übergangsmatrizen**.

Wer heute seine Lebensmittel beim Supermarkt A eingekauft hat, wird mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit nächste Woche wieder bei A (0,7 = 70%), bei den Konkurrenten P (0,2) oder L (0,1) einkaufen, wer bei P einkauft wechselt mit 0,2 zu A und mit 0,2 zu L, Einkäufer bei L wechseln mit 0,3 zu A und 0,3 zu P. Wenn die Verteilung der Kundschaft auf diese drei Märkte in der aktuellen Woche bekannt ist (30% kaufen bei A, 30% bei P und 40% bei L), dann kann die Verteilung in der nächsten und in der übernächsten Woche ermittelt werden. Dazu muss der Vektor mit der aktuellen Verteilung nur mit der Matrix multipliziert werden, die die Übergangswahrscheinlichkeiten enthält.

z. B.: $$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}32 \\ 0{,}29 \end{pmatrix}$$

Eine Woche später: $$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}39 \\ 0{,}32 \\ 0{,}49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}424 \\ 0{,}328 \\ 0{,}248 \end{pmatrix}$$

Oder: $$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}424 \\ 0{,}328 \\ 0{,}248 \end{pmatrix}$$

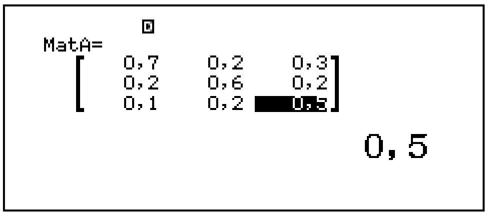
Nach zehn Wochen: $$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}444 \\ 0{,}333 \\ 0{,}222 \end{pmatrix}$$

Hat sich eine stabile Verteilung herausgebildet die sich auch in den nächsten Wochen nicht mehr verändern wird. Diese Verteilung ist auch unabhängig vom Startwert. Zur Übergangsmatrix M gibt es offensichtlich einen Vektor $\vec{x}$ mit der Eigenschaft: $M * \vec{x} = \vec{x}$

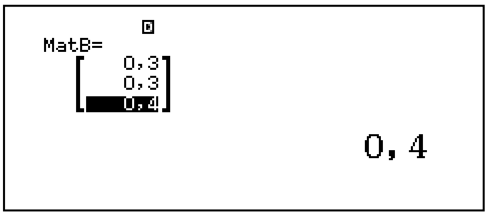
Dieser Vektor $\vec{x}$ heißt Fixvektor. Man kann zeigen, dass eine Matrix M einen Fixvektor besitzt wenn sich ihre Potenzen M^k für große Werte von k nicht mehr ändern, sie streben einer Grenzmatrix M^∞ zu. Die Spalten dieser Grenzmatrix sind gleich dem Fixvektor.

Aufgabe 1: Rechnen Sie das obige Beispiel durch.

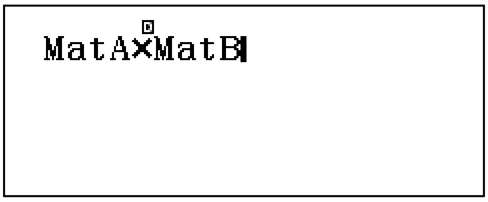
Über [MENU] [4] [1] [3] [3] wird das Matrixmenü erreicht und die 3x3-Matrix kann (zeilenweise) eingegeben werden.

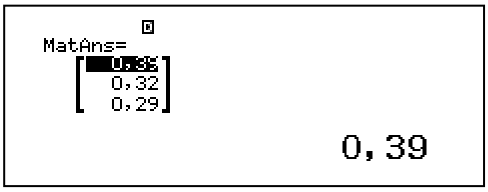


Mit [OPTN] [1] [2] [3] [1] wird dem Rechner der Startwert mitgeteilt.



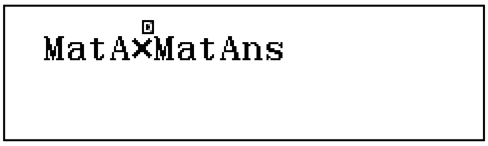
Die Multiplikation erfolgt über die Tastenfolge: [OPTN] [3] [OPTN] [3] [×] [OPTN] [4] [=]

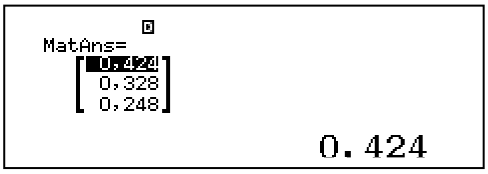




Das Ergebnis kann gleich für die nächste Rechnung eingesetzt werden.

[OPTN] [3] [×] [OPTN] [▼] [1] [=]





Potenzen einer Matrix können nur mit den Tasten [OPTN] [3] [x^2] [=] (Quadrat) oder [OPTN] [3] [SHIFT] [x^2] [=] errechnet werden.

Die Taste [$x^■$] ist dafür nicht geeignet.

Aufgabe 2: Rechnen Sie das obige Beispiel mit einem anderen Startwert durch.

Der fx-991 DE X im Mathematik-Unterricht

Analytische Geometrie

Station 6

Rechnen komplexen Zahlen

Mittels CALC wird der Modus „2:Komplexe Zahlen“ eingestellt. Im SETUP-Menü kann festgelegt werden, ob die komplexen Zahlen in der Standardform $a + bi$ oder in der Versorform $r\angle\varphi$ angezeigt werden.

Die Versorform ist eine verkürzte Darstellung der trigonometrischen Form $|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.

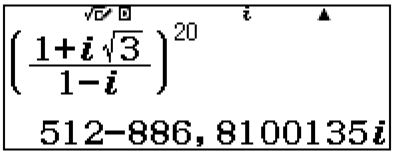
Alle 4 Grundrechenoperationen sind mit komplexen Zahlen ausführbar.

Beim FX-991DE X darf der Exponent – anders als bei früheren Modellen - im Rahmen der Taschenrechnerzahlen beliebig groß sein.

So kann auch der Term

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$$

berechnet werden.



Der CASIO FX-991DE X verfügt über folgende Befehle für komplexe Zahlen:

- Betrag
- Argument
- Konjugierte
- Realteil
- Imaginärteil
- Umwandlung in Versorform
- Umwandlung in Standardform

Beispiel: Berechnung von $\sqrt[n]{a + bi}$

Der Ausdruck $\sqrt[n]{a + bi}$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ hat im Komplexen *n* verschiedene Werte.

Das sind die *n* verschiedenen Lösungen der Gleichung $w^n = a + bi$.

Es gilt für $z = a + bi$

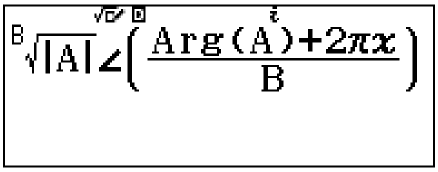
$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{Arg(z) + 2\pi k}{n}\right) + i\ sin\left(\frac{Arg(z) + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

mit $k = 0, 1, 2, \cdots, k - 1.$

Ein Beispiel

Es sind die drei Werte für $\sqrt[3]{10 - 5i}$ zu berechnen.

Die allgemeine Formel wird in folgender Form eingegeben



Mithilfe der CALC -Taste wird dieser Ausdruck für $x = 0, 1$ und 2 berechnet.

Dazu wird für $A = 10 - 5i$ und für $B = 3$ eingegeben. Es ergibt sich

$\sqrt[3]{10 - 5i}_0 \approx 2{,}209 + 0{,}344i;$

$\sqrt[3]{10 - 5i}_1 \approx -0{,}807 + 2{,}086i;$

$\sqrt[3]{10 - 5i}_2 \approx -1{,}403 - 1{,}741i$.